

Concursul județean de matematică "Podul Înalt"

Ediția a X a

14 mai 2016

Clasa a V a – barem

1. a) $555^3 - 125 \cdot 111^3 = 5^3 \cdot 111^3 - 125 \cdot 111^3 = 125 \cdot 111^3 - 125 \cdot 111^3 = 0$. **2p**

b) $\frac{5}{(x+1)(y-2)}$ este echiunitară $\Leftrightarrow (x+1)(y-2) = 5$ **1p**

Se obțin ecuațiile $(x+1) = 1$ și $(y-2) = 5$, de unde avem $x = 0$ și $y = 7$ **1p**

sau $(x+1) = 5$ și $(y-2) = 1$ de unde avem $x = 4$ și $y = 3$ **1p**

c) $\frac{4n+6}{n^2+n} = \frac{2(2n+3)}{n(n+1)}$ **1p**

Numărătorul este divizibil cu 2, iar numitorul este produs de numere naturale consecutive, prin urmare este nr. par. Se obține că fracția se poate simplifica prin 2. **1p.**

2. Fie a numărul de pagini citite în prima zi. Se obține ecuația:

$$a + a + 5 + a + 10 + a + 15 + a + 20 = 275. \quad \mathbf{3p}$$

cu soluția $a = 45$ **3p**

a treia zi 55 de pagini. **1p**

3. $\overline{ab3} + \overline{a5c} + \overline{7bc} = 1243$ Se descompune fiecare termen al sumei (baza 10)

$$(100a + 10b + 3) + (100a + 50 + c) + (700 + 10b + c) = 1243. \quad \mathbf{3p}$$

$$\text{Avem } 200a + 20b + 2c = 490 \quad \mathbf{2p}$$

$$\text{Găsim } 100a + 10b + c = 245 \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{Obținem } \overline{abc} = 245. \quad \mathbf{1p}$$

4. Ana desenează $1, 3, 5, \dots, 2k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) pătrate roșii. **1p**

Alin desenează $2, 4, 6, \dots, 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) pătrate albastre. **1p**

$$\text{Avem: } 1 + 3 + 5 + \dots + 2k-1 = k^2 \quad \mathbf{2p}$$

$$\text{și } 2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k+1) \quad \mathbf{2p}$$

k^2 este pătrat perfect, iar $k(k+1)$ nu este pătrat perfect (produs de numere nat. consecutive), adică nu pot fi egale. **1p**

Clasa a VI a – barem

1. a) $3^x + 63 = 12^2 \Leftrightarrow 3^x = 144 - 63$ 0,5p

de unde $3^x = 81 = 3^4$, 0,5p

adică $x = 4$. 1

b) avem $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 60 = 61 \cdot 30$ 0,5p

$b = \frac{1}{60}$ 0,5p

obținem $\frac{a}{b} = \frac{61 \cdot 30}{\frac{1}{60}}$, de unde $\frac{a}{b} = 61 \cdot 30 \cdot 60 = 109800$. 1p

c) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 3k \\ z = 4k \end{cases}$ 1p

avem $k^2 + k^2 + 4k^2 = 294 \Rightarrow k^2 = \frac{294}{6} = 49 \Rightarrow k = 7$ (1p) $\Rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 21 \\ z = 28 \end{cases}$ (1p)

2. $2^{n+1} \cdot 9^n + 6^n \cdot 3^{n+1} + 37 = 2^{n+1} \cdot 3^{2n} + 2^n \cdot 3^n \cdot 3^{n+1} + 37 =$
 $2^{n+1} \cdot 3^{2n} + 2^n \cdot 3^{2n+1} + 37$ 2p

Se scoate factor comun $2^n \cdot 3^{2n} \cdot (2 + 3) + 37 = 5 \cdot 2^n \cdot 3^{2n} + 37$ 2p

$5 \cdot 2^n \cdot 3^{2n}$ se divide cu 5, deci restul împărțirii sale la 5 este 0. 1p

37 împărțit la 5 dă restul 2. 2p

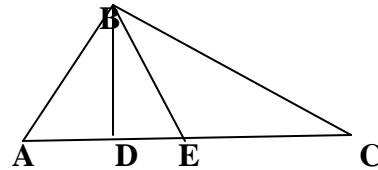
3. Figura completă 1p

$m(\sphericalangle ABC) = 80^\circ$ 2p

$m(\sphericalangle ABE) = 40^\circ$ 1p

$m(\sphericalangle ABD) = 20^\circ$ 2p

$m(\sphericalangle DBE) = 20^\circ$ 1p



BE bisectoare, AE înălțime

4. $m(\sphericalangle BFC) = 180^\circ - [m(\sphericalangle FBC) + m(\sphericalangle FCB)]$ 1p

$\sphericalangle FBC \equiv \sphericalangle XBD$ și $\sphericalangle FCB \equiv \sphericalangle ECY$, opuse la vârf 1p

Obținem $m(\sphericalangle BFC) = 180^\circ - [m(\sphericalangle XBD) + m(\sphericalangle ECY)]$ 1p

$m(\sphericalangle XBD) = \frac{m(\sphericalangle XBA)}{2}$ și $m(\sphericalangle ECY) = \frac{m(\sphericalangle ACY)}{2}$ 1p

Înlocuim, $m(\sphericalangle BFC) = 180^\circ - \frac{m(\sphericalangle XBA) + m(\sphericalangle ACY)}{2}$ 1p

Folosind teorema unghiului exterior găsim:

$m(\sphericalangle BFC) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - m(\sphericalangle ABC) + 180^\circ - m(\sphericalangle ACB))$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - (m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB)))$ 1p

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - (180^\circ - m(\sphericalangle BAC))) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + m(\sphericalangle BAC))$

Obținem $m(\sphericalangle BFC) = 49^\circ$. 1p

Concursul județean de matematică “Podul Înalt”
Ediția a X a
14 mai 2016

Clasa a VII a – barem

1. a) $(2\sqrt{3} + 1)^2 = 13 + 4\sqrt{3}$ **1p**
 $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$. **1p**

b) Se folosesc succesiv cele două relații de la a) și se găsește că $A=1$ rațional.

$$A = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}}} =$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{5 - 1 - 2\sqrt{3}}} \quad (2p)$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = \quad (2p) \quad = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1} = 1 \in \mathbb{Q}. \quad (1p)$$

2. Avem ecuația

$$2k + (2k + 2) + (2k + 4) + (2k + 6) + (2k + 8) + (2k + 10) = 126 \quad \mathbf{2p}$$

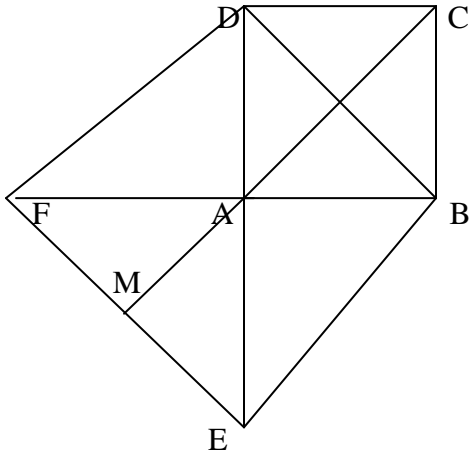
$$\text{Găsim } 12k = 96 \Rightarrow k = 8. \quad \mathbf{2p}$$

a) În prima zi a citit 16 pagini **1p**

b) În primele trei zile $16 + 18 + 20 = 54$ pagini
 În ultimele trei zile $22 + 24 + 26 = 72$ pagini **1p**

Folosind regula de trei simplă se obține 75% **1p**

3.



- a) Triunghiurile AEB și AFD sunt dreptunghice congruente (cazul C.C.), de unde rezultă că $BE = DF$.

2p

- b) Este suficient să arătăm că $BD \parallel EF$, relație care rezultă din reciproca teoremei lui Thales, ținând

cont că $\frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AE}$. **2p**

- c) Notăm $AB = a$, cu $a \in \mathbb{R}_+$. Obținem

$$AE = AF = AC = BD = a\sqrt{2}, \text{ iar } EF = 2a. \quad \mathbf{1p}$$

Fie O și M mijloacele laturilor $[DB]$ și $[EF]$. Avem $OM \perp BD$, deci înălțimea trapezului este $OM = OA + AM = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{2a}{2} = \frac{a(\sqrt{2}+2)}{2} = \frac{BD+EF}{2}$, deci linia mijlocie a trapezului BDFE are aceeași lungime cu înălțimea OM. **2p**

4. $L = 10\text{cm}$

$l = 6\text{cm}$

- a) $60:10=6$, iar $60:6=10$. Latura pătratului va fi de 60 cm **2p**

- b) 50 nu este divizibil cu 6, prin urmare nu se pot aseza plăci dreptunghiulare, adică nu putem obține un pătrat. **2p**

- c) C.m.m.c pt 10 și 6 este 30. Se va obține un pătrat cu latura de 30 cm format din 15 de plăci dreptunghiulare. **3p**

Concursul județean de matematică “Podul Înalt”

Ediția a X a

14 mai 2016

Clasa a VIII a – barem

1. a) i. $a + b = 4$ **1p**
 $a^2 + b^2 = 14.$ **1p**

ii. $a = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ **1p**

Raționalizând se va obține b. **1p**

iii. $m_g = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{4 - 3} = 1.$ **1p**

b) $|x + y - 1| + |x + 2y + 1| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \text{ (1p)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ (1p)}$

2. a) $E(x) = \left[2x - \left(\frac{2x-3}{x+1} - \frac{x+1}{2-2x} - \frac{x^2+3}{2x^2-2} \right) \right] : \frac{x^2+1}{x^2-2},$

Se aduce în paranteză la același numitor, $2(x-1)(x+1)$ **1p**

Prin calcule se obține $(x) = \left(2x - \frac{2x-2}{x+1} \right) : \frac{x^2+1}{x^2+x},$ **1p**

de unde $E(x) = 2x.$ **1p**

b) Avem inecuația $|3 - 2x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 3 - 2x \leq 3$ **1p**

Obținem $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ și cum $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, găsim $x \in \{2, 3\}$ **1p**

c) Avem $E(n) + E(n^2) = 2n + 2n^2 = 2n(n+1)$ **1p**

Cum un produs de numere natural consecutive este divizibil cu 2 obținem că $E(n) + E(n^2)$ se divide cu 4. **1p**

3. Dacă se îndoaie după o dreaptă MN paralelă cu AB avem:

$$AM \perp MN, (AMN) \cap (DMN) = MN, (AMN) \perp (DMN) \Rightarrow AM \perp (BMN). \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{Din Teorema lui Pitagora în } \triangle DMB \text{ găsim } BD = \sqrt{2b^2 + 4a^2} \quad \mathbf{2p}$$

Dacă se îndoaie după o dreaptă MN paralelă cu AD avem:

$$DM \perp MN, (AMN) \cap (BMN) = MN, (AMN) \perp (BMN) \Rightarrow DM \perp (BMN) \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{Din Teorema lui Pitagora în } \triangle DMB \text{ găsim } BD = \sqrt{2a^2 + 4b^2} \quad \mathbf{2p}$$

Ținând cont că $a > b$, comparând cele doua rezultate, găsim că distanța dintre B și D este mai mică dacă se îndoaie după o dreaptă paralelă cu AD. **1p**

4. a) $AB = BC = CD = DA \Rightarrow ABCD$ romb. **1p**

O este proiecția punctului V pe planul (ABC)

$$\triangle VOA \equiv \triangle VOB \equiv \triangle VOC \equiv \triangle VOD \Rightarrow OA = OB = OC = OD \Rightarrow O \text{ centrul pătratului } \text{și}$$

$$AC = BD, \text{ adică } ABCD \text{ pătrat} \Rightarrow VABCD \text{ piramidă regulată.} \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{b) } A_l = 4 \cdot A_{\triangle VAB}, \triangle VAB \text{ echilateral. Obținem } AB = 6 \text{ cm} \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{și } VO = 3\sqrt{2} \text{ cm} \quad \mathbf{1p}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^3. \quad \mathbf{1p}$$

- c) În triunghiul VAC se folosește reciproca teoremei lui Pitagora și se găsește

$$m(\sphericalangle AVC) = 90^\circ \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{d) Fie } OS \perp VA, S \in VA. OS \text{ linie mijlocie în triunghiul VAC} \Rightarrow OS = 3 \text{ cm} \quad \mathbf{1p}$$